

TD2: Applications linéaires

Exercice 1. Révisions.

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x+2y-1 \quad ; \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x-y, 2x) \quad ; \quad f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto x(0, y).$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1, 0, 0) = (2, 1) \quad ; \quad f(0, 1, 0) = (1, -1) \quad ; \quad f(0, 0, 1) = (0, 1).$$

Déterminer $f(x, y, z)$.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires:

1. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P(X) \mapsto (P(0), P'(1))$
2. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto A(X)P(X)$ où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé.
3. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X)^2$
4. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto XP(X) + P'(X)$

Solution.

1. OUI.

Montrons que f est une application linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant le fait que $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P'(1) + \mu Q'(1)) \\ &= (\lambda P(0), \lambda P'(1)) + (\mu Q(0), \mu Q'(1)) \\ &= \lambda(P(0), P'(1)) + \mu(Q(0), Q'(1)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. OUI.

Montrons que f est une application linéaire. Fixons $A \in \mathbb{R}[X]$. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = A(X)(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda A(X)P(X) + \mu A(X)Q(X) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

D'où le résultat.

3. NON.

On pose $P = Q = 1$.

On a alors

$$f(P + Q) = f(2) = 4,$$

alors que

$$f(P) + f(Q) = 1 + 1 = 2.$$

Donc

$$f(P + Q) \neq f(P) + f(Q),$$

L'application f n'est donc pas une application linéaire.

4. OUI

Montrons que f est une application linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant le fait que $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda X P(X) + \mu X Q(X) + \lambda P'(X) + \mu Q'(X) \\ &= \lambda(X P(X) + P'(X)) + \mu(X Q(X) + Q'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 3. Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} . Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires:

1. $\varphi_1 : E \rightarrow E, (\varphi_1(f))(x) = f(x)^2$
2. $\varphi_2 : E \rightarrow E, (\varphi_2(f))(x) = f(x^2)$
3. $\varphi_3 : E \rightarrow E, (\varphi_3(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Solution.

1. NON.

On pose f, g constantes égales à 1 (c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) = 1$). Alors, la fonction $\varphi_1(f + g)$ est constante égale à 4 alors que $\varphi_1(f) + \varphi_2(g)$ est constante égale à 2. Ainsi,

$$\varphi_1(f + g) \neq \varphi_1(f) + \varphi_2(g).$$

L'application φ_1 n'est donc pas une application linéaire.

2. OUI.

Montrons que φ_2 est une application linéaire. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x^2) \\ &= \lambda f(x^2) + \mu g(x^2) \\ &= \lambda \varphi_2(f)(x) + \mu \varphi_2(g)(x) = (\lambda \varphi_2(f) + \mu \varphi_2(g))(x). \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\varphi_2(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi_2(f) + \mu \varphi_2(g).$$

Finalement, φ_2 est une application linéaire.

3. OUI.

Montrons que φ_3 est une application linéaire. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_3(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda \int_0^x f(t) dt + \mu \int_0^x g(t) dt \\ &= \lambda \varphi_3(f)(x) + \mu \varphi_3(g)(x) = (\lambda \varphi_3(f) + \mu \varphi_3(g))(x)\end{aligned}$$

On a montré que

$$\varphi_3(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi_3(f) + \mu \varphi_3(g).$$

Finalement, φ_3 est une application linéaire.

Exercice 4. On définit l'application suivante :

$$D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P(X) \mapsto P'(X),$$

1. Montrer que l'application D est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de D .
3. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R}_n[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. Montrons que D est une application linéaire. Soit $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$D(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P'(X) + \mu Q'(X) = \lambda D(P) + \mu D(Q)$$

L'application D est donc une application linéaire.

2. Par définition,

$$\text{Ker}(D) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid D(P) = P'(X) = 0\}$$

Donc le noyau de l'application D est l'ensemble des polynômes dont la dérivée est le polynôme 0. C'est donc l'ensemble des polynômes constants. Autrement dit, c'est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 0 . Finalement,

$$\text{Ker}(D) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 0\}.$$

L'image de l'application D est :

$$\text{Im}(D) = \{D(P) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Montrons que

$$\text{Im}(D) = \mathbb{R}[X].$$

On a évidemment $\text{Im}(D) \subset \mathbb{R}[X]$ puisque la dérivée de tout polynôme est aussi un polynôme.

Maintenant, soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrons que $P \in \text{Im}(D)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = D(Q)$.

Supposons que $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, où $n = \deg(P)$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On pose

$$Q(X) = a_0X + \frac{a_1}{2}X^2 + \frac{a_2}{3}X^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}X^{n+1} \in \mathbb{R}[X].$$

On a alors bien $D(Q) = P$, nous avons donc montré que $\mathbb{R}[X] \subset \text{Im}(D)$.

Finalement, par double inclusion, on a $\text{Im}(D) = \mathbb{R}[X]$.

3. Montrons que

$$D^{-1}(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

Par définition,

$$D^{-1}(\mathbb{R}_n[X]) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid D(P) \in \mathbb{R}_n[X]\}.$$

Premièrement, on sait que la dérivée d'un polynôme de degré au plus $n+1$ est un polynôme de degré au plus n . On a donc immédiatement que $\mathbb{R}_{n+1}[X] \subset D^{-1}(\mathbb{R}_n[X])$.

Maintenant, soit $P \in D^{-1}(\mathbb{R}_n[X])$, et montrons que $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Comme $P \in D^{-1}(\mathbb{R}_n[X])$, on a $D(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Cela signifie qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$D(P) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.$$

Or, par définition, $D(P) = P'(X)$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ une constante telle que :

$$P(X) = c + a_0X + \frac{a_1}{2}X^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}X^{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

On a donc montré que $D^{-1}(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

D'où le résultat.

Exercice 5. (*) Soit $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont la première dérivée est continue.

1. Montrer que $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un s.e.v. de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la dérivation D :

$$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(x) \mapsto f'(x), \tag{1}$$

est un épimorphisme (une application linéaire surjective).

Solution.

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Premièrement, la fonction nulle est bien C^1 donc $E \neq \emptyset$ et les fonctions dérivables sur \mathbb{R} sont continues donc $E \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Maintenant, soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et montrons que $\lambda f + g \in E$.

Pour montrer que la fonction $\lambda f + g$ est dérivable, considérons le taux d'accroissement en $x \in \mathbb{R}$:

$$\tau_x(h) = \frac{(\lambda f + g)(x+h) - (\lambda f + g)(x)}{h} = \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

On a donc :

$$\tau_x(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda f'(x) + g'(x),$$

donc $\lambda f + g$ est bien dérivable.

De plus, $\lambda f' + g'$ est continue comme somme de fonctions continues donc $\lambda f + g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est bien un s.e.v. de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. La dérivation D est évidemment une application linéaire. Montrons que c'est une application surjective.

Soit $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On définit f comme étant la fonction suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $D(f) = g$ continue. On en déduit que D est une application linéaire surjective.

Exercice 6. Soient E, F, G trois K -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

1. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$
2. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
3. $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$
4. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Solution.

1. On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in \text{Ker}(g \circ f) \iff g(f(x)) = 0 \iff f(x) \in \text{Ker}(g) \iff x \in f^{-1}(\text{Ker}(g)).$$

D'où le résultat.

2. Comme $\{0\} \subset \text{Ker}(g)$, on déduit de 1. que :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\text{Ker}(g)) = \text{Ker}(g \circ f).$$

D'où le résultat.

3. On a :

$$\text{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(\text{Im}(f)).$$

4. Comme $\text{Im}(f) \subset F$, on déduit de 3. :

$$\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f)) \subset g(F) = \text{Im}(g).$$

D'où le résultat.

Exercice 7. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

Cette équivalence reste-elle vraie en dimension infinie ?

Solution. *Condition nécessaire.* On a $f(E) \subset E$ car f est un endomorphisme, et donc $f^2(E) = f[f(E)] \subset f(E)$. Cela signifie que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Montrons maintenant que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, il existe $(x_1, x_2) \in \text{Im}(f) \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a donc :

$$y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) \in \text{Im}(f^2).$$

D'où le résultat.

Condition suffisante. Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$. Donc $f(x - f(x')) = 0$, d'où $y = x - f(x') \in \text{Ker}(f)$. Si $z = f(x') \in \text{Im}(f)$, on a donc $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)$. On a donc montré que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim(E)$, on en déduit $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

En dimension infinie, ce résultat est faux. Par exemple, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est définie par $f(P) = P'$, on a $\text{Im}(f^2) = \mathbb{R}[X] = \text{Im}(f)$, et pourtant $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe ($\text{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$ et $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$).

Exercice 8. Soit E un K -espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux s.e.v. de dimension finie, on définit l'application linéaire $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f(u, v) = u + v$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f . Montrer que $\text{Ker}(f)$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.
3. Que donne le théorème du rang ?

Solution.

1. Montrons que f est une application linéaire. Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux éléments de $E_1 \times E_2$ et λ, μ deux éléments de K . Alors :

$$f(\lambda(u_1, v_1) + \mu(u_2, v_2)) = \lambda(u_1 + v_1) + \mu(u_2 + v_2) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda f(u_1, v_1) + \mu f(u_2, v_2).$$

D'où le résultat.

2. Par définition on a :

$$\text{Ker}(f) = \{(u, v) \in E_1 \times E_2 \mid f(u, v) = 0\}.$$

On a donc,

$$(u, v) \in \text{Ker}(f) \iff f(u, v) = 0 \iff u + v = 0 \iff u = -v.$$

Comme E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E , si $(u, v) \in E_1 \times E_2$ vérifient $f(u, v) = 0$, alors $u \in E_2$ et $v \in E_1$, c'est à dire que u et v sont dans $E_1 \cap E_2$. On vient de montrer que $\text{Ker}(f) \subset \{(u, -u) \mid u \in E_1 \cap E_2\}$. L'inclusion réciproque étant trivialement vérifiée, on a donc :

$$\text{Ker}(f) = \{(u, -u) \mid u \in E_1 \cap E_2\}.$$

Remarquons l'existence d'un isomorphisme entre $\text{Ker}(f)$ et $E_1 \cap E_2$, donné par :

$$\varphi : E_1 \cap E_2 \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(f), \quad u \mapsto (u, -u).$$

Par définition,

$$\text{Im}(f) = \{f(u, v) \mid (u, v) \in E_1 \times E_2\} = \{u + v \mid u \in E_1, v \in E_2\} = E_1 + E_2.$$

3. Les espaces vectoriels $E_1 \times E_2$ et E étant de dimension finie, d'après le théorème du rang on a :

$$\dim(E_1 \times E_2) = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f).$$

Or, d'après le cours, on a : $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$, et d'après la question précédente, $\text{rg } f = \dim(E_1 + E_2)$. Toujours d'après la question précédente, $\text{Ker}(f)$ et $E_1 \cap E_2$ étant isomorphes, on a également : $\dim(\text{Ker } f) = \dim(E_1 \cap E_2)$. Finalement, on obtient :

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2).$$

Cet exercice fournit donc une preuve alternative de la proposition 1.34, *via* les applications linéaires.

Exercice 9. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{ rg}(f))$$

Solution. *Condition nécessaire.* Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$. Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ donc $f(f(x)) = 0$, ce qui montre $f^2 = 0$.

En utilisant le théorème du rang et l'hypothèse, on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim \text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f),$$

ce qui donne $n = 2 \text{ rg}(f)$.

Condition suffisante. Supposons $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{ rg}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = f^2(x) = 0$, donc $y \in \text{Ker}(f)$.

On a montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

En utilisant le théorème du rang, on a :

$$\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f) = \text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f).$$

On en déduit, avec ce qui précède, que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Exercice 10. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\text{Id} - p$ l'est aussi.
2. Exprimer alors $\text{Im}(\text{Id} - p)$ et $\text{Ker}(\text{Id} - p)$ en fonction de $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$.

Solution.

1. Rappel: p est un projecteur si $p^2 = p$, où $p^2 = p \circ p$.

Supposons que p est un projecteur. Dans ce cas, comme $\text{Id}^2 = \text{Id}$, on a

$$(\text{Id} - p)^2 = \text{Id}^2 - 2p + p^2 = \text{Id} - p$$

et donc $\text{Id} - p$ est un projecteur.

Maintenant, supposons que $\text{Id} - p$ est un projecteur. Alors puisque $p = \text{Id} - (\text{Id} - p)$, un calcul donne :

$$\begin{aligned} p \circ p &= (\text{Id} - (\text{Id} - p)) \circ (\text{Id} - (\text{Id} - p)) \\ &= (\text{Id} - (\text{Id} - p)) - (\text{Id} - p) \circ (\text{Id} - (\text{Id} - p)) \\ &= p - (\text{Id} - p) + (\text{Id} - p)^2 \\ &= p - (\text{Id} - p) + (\text{Id} - p) \quad (\text{car } (\text{Id} - p) \text{ est un projecteur}) \\ &= p \end{aligned}$$

et donc p est un projecteur.

D'où le résultat.

2. Montrons que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(\text{Id} - p)$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(p) &\implies p(x) = 0 \\ &\implies x = x - p(x) \\ &\implies x = (\text{Id} - p)(x) \in \text{Im}(\text{Id} - p). \end{aligned}$$

On a donc montré $\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(\text{Id} - p)$.

Pour l'inclusion réciproque, si $y \in \text{Im}(\text{Id} - p)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = x - p(x)$, et donc

$$p(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$

et donc $y \in \text{Ker}(p)$.

D'où le résultat.

Montrons que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\text{Id} - p) &\implies (\text{Id} - p)(x) = 0 \\ &\implies x - p(x) = 0 \\ &\implies x = p(x) \in \text{Im}(p) \end{aligned}$$

On a donc montré $\text{Ker}(\text{Id} - p) \subset \text{Im}(p)$. Pour l'inclusion réciproque, si $y \in \text{Im}(p)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$, et donc

$$(\text{Id} - p)(y) = y - p(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$

et donc $y \in \text{Ker}(\text{Id} - p)$.

D'où le résultat.

Exercice 11. Soient E un K -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$$

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
2. Etablir que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ sont des s.e.v. supplémentaires de E .

Solution.

1. Puisque f est une application linéaire, on peut écrire :

$$f \circ \left(-\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}\text{Id} \right) = \text{Id} = \left(-\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}\text{Id} \right) \circ f.$$

Par définition, f est donc inversible et $f^{-1} = -\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}\text{Id}$.

2. Tout d'abord, montrons que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

On peut remarquer que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id} = f \circ (f - 2\text{Id}) - (f - 2\text{Id}) = 0.$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$, $2x - f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Soit $x \in E$. On peut alors écrire :

$$x = y + z, \quad \text{où } y = 2x - f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \text{ et } z = f(x) - x.$$

Montrons que $z \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

C'est le cas puisque $(f - 2\text{Id})(z) = f^2(x) - f(x) - 2f(x) + 2x = f^2(x) - 3f(x) + 2x = 0$.

On a donc montré que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Maintenant, montrons que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id})$, alors $x = f(x)$ et $2x = f(x)$ d'où $x = 2x$ et donc $x = 0_E$.

Finalement, on a montré que

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

Exercice 12. (*) Soient f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

1. Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans E .
2. Justifier que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.

Solution.

1. Pour montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires, il faut montrer que (a) $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$ et (b) $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$.

Montrons (a). Soit $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$. Alors, $g(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Alors, puisqu'on a supposé $f \circ g \circ f = f$, on a :

$$x = f(y) = f(g(f(y))) = f(g(x)) = f(0) = 0.$$

D'où le résultat.

Montrons (b). Soit $x \in E$. Alors on peut écrire

$$x = f(g(x)) + (x - f(g(x))).$$

On a tout de suite que $f(g(x)) \in \text{Im}(f)$, il suffit donc de vérifier que $x - f(g(x)) \in \text{Ker}(g)$. Cela est dû du fait que, par hypothèse, $g = g \circ f \circ g$, et donc :

$$g(x - f(g(x))) = g(x) - g(f(g(x))) = g(x) - g(x) = 0.$$

D'où le résultat.

2. Procédons par double inclusion. On a évidemment que $f(\text{Im}(g)) \subset \text{Im}(f)$.

Soit donc $y \in \text{Im}(f)$, et montrons que $y \in f(\text{Im}(g))$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'après les hypothèses, on peut écrire :

$$y = f(x) = f(g(f(x))).$$

y est donc l'image par f de l'élément $g(f(x)) \in \text{Im}(g)$. Il suit que $y \in f(\text{Im}(g))$.

D'où le résultat.

Exercice 13. (*) Soient E un K -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie (c'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \text{id}_E$).

Solution. Par hypothèse, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Il est clair que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ fixé, λ_x est unique et, *a priori*, dépend de x .

Nous allons montrer que λ_x ne dépend pas de x .

Soit $(x, y) \in E \setminus \{0\}$.

- Supposons que la famille (x, y) est libre. On a :

$$f(x) = \lambda_x x, \quad f(y) = \lambda_y y, \quad f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$

Par linéarité de f , on en déduit :

$$\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y).$$

C'est-à-dire :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Comme la famille (x, y) est libre, on en déduit que $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et donc $\lambda_x = \lambda_y$.

- Supposons que la famille (x, y) est liée. Il existe alors $\alpha \in K \setminus \{0\}$, tel que $y = \alpha x$.

On a :

$$f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x \quad \text{et} \quad f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \alpha x,$$

d'où $(\lambda_x - \lambda_y)\alpha x = 0$, et donc $\lambda_y = \lambda_x$.

On a ainsi montré que λ_x ne dépend pas de x .

Donc il existe $\lambda \in K$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$. De plus, trivialement, $f(0) = 0 = \lambda 0$.

Finalement, $f = \lambda \text{id}_E$, donc f est une homothétie.

Exercice 14. Soient p et q deux projecteurs d'un K -espace vectoriel E vérifiant $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

1. Montrer que $r = p + q - p \circ q$ est un projecteur.
2. (*) Montrer que :

$$\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q), \quad \text{et} \quad \text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q).$$

Solution.

1. On utilise la notation produit pour la composition et on écrit $r^2 = (p + q - pq)^2 = (p + q - pq)(p + q - pq)$. Attention! Ce produit n'est pas commutatif, parce que en général pq et qp sont différentes^{1!!}

On remarque que $qp = 0$ par l'hypothèse $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$, et que $p^2 = p$ et $q^2 = q$ car il s'agit de projecteurs. Donc:

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - pq)^2 = (p + q - pq)(p + q - pq) \\ &= p^2 + pq - p^2q + qp + q^2 - qpq - pqp - pq^2 + pqpq \\ &= p + q - pq = r. \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité s'obtient en utilisant $qp = 0$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

Finalement, r est bien un projecteur.

2. Montrons que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ par double inclusion.

Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Alors $p(x) = q(x) = 0$, et donc

$$r(x) = p(x) + q(x) - p(q(x)) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

d'où $x \in \text{Ker}(r)$. On a donc $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(r)$.

Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(r)$, alors $r(x) = 0$, et donc :

$$p(x) + q(x) - p(q(x)) = 0 \iff q(x) = p(q(x) - x).$$

En particulier, $q(x) \in \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$, et donc $q^2(x) = q(x) = 0$, ce qui signifie que $x \in \text{Ker}(q)$.

Si l'on remplace $q(x)$ par 0 dans l'égalité ci-dessus, on obtient que $p(-x) = 0 \iff p(x) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(p)$.

On a donc montré que $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Montrons que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Pour l'inclusion " \subset " : soit $y \in \text{Im}(r)$. Montrons que $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = r(x)$. On peut alors écrire :

$$y = r(x) = p(x - q(x)) + q(x) \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q).$$

D'où le résultat.

Montrons maintenant que $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$. Soit $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Montrons que $y \in \text{Im}(r)$.

Alors il existe $u, v \in E$ tels que $y = p(u) + q(v)$.

En utilisant le fait que $p \circ p = p$ et que $q \circ p = 0$ on peut écrire :

$$p(u) = p^2(u) + 0 + 0 = p^2(u) + qp(u) - pqp(u) = (p + q - pq)(p(u)) = r(p(u)) \in \text{Im}(r).$$

De plus, puisque $q \circ q = q$ on peut écrire :

$$q(v) = (pq + q - pq)(v) = (pq + q^2 - pq^2)(v) = (p + q - pq)(q(v)) = r(q(v)) \in \text{Im}(r).$$

Finalement, on a montré que $y = p(u) + q(v) \in \text{Im}(r)$.

D'où le résultat.

¹en fait, ce produit n'est rien d'autre que le produit entre matrices...